Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

16.03.2024.

III разред

1. Израчунај за колико је трећина броја 246 већа од петине броја 345.

2. Лео је замислио број који је одузео од 500, а затим је добијену разлику одузео од 1000 и тако добио број 555. Који број је Лео замислио?

3. У поља квадрата упиши бројеве тако да он буде магичан.

14		
	15	
	17	

4. Замени слова цифрама (иста слова истим цифрама, а различита слова различитим цифрама) тако да добијеш тачну једнакост:

$$СИН + НОС = 353.$$

Одреди сва решења.

5. У фабрици *А* је било 376 радника више него у фабрици *В*. У фабрици *А* је онда запослено још 257 радника, а у фабрици *В* још 489 радника. У којој фабрици, након што су запослени нови радници, има више радника и за колико?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

III РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Трећина броја 246 је 246 : 3 = 82 [**7 бодова**]. Петина броја 345 је 345 : 5 = 69 [**7 бодова**]. Тражена разлика је 246 : 3 – 345 : 5 = 82 – 69 = 13 [**6 бодова**].

2. (МЛ 56/3) Ако је Лео замислио број x, онда постављеном проблему одговара једначина

$$1000 - (500 - x) = 555$$ [**6 бодова**].

Решавањем једначине долазимо до траженог броја.

$500 - x = 1000 - 555$ [**4 бода**]

$500 - x = 445$ [**3 бода**]

$x = 500 - 445$ [**4 бода**]

$x = 55$ [**3 бода**].

3. Сваки тачно одређен број **по 3 бода**. Свих 6 тачно одређених бројева 20 бодова.

14	**13**	**18**
19	15	**11**
12	17	**16**

4. Из једнакости $С + Н = 3$ за цифру стотина и јединица, имамо $И + О = 5$. Како $С$ и $Н$ мењају цифре стотина, морају бити веће од 0. Закључујемо да је $С = 1$, $Н = 2$ или $С = 2$, $Н = 1$. У оба случаја, цифре $И$ и $О$ морају бити различите од $С$ и $Н$, па су могућности за њих $И = 0$, $О = 5$ или $И = 5$, $О = 0$. Дакле, тражене вредности су:

С = 1, Н = 2, И = 0, О = 5, (102 + 251 = 353) [**5 бодова**],
С = 1, Н = 2, И = 5, О = 0, (152 + 201 = 353) [**5 бодова**],
С = 2, Н = 1, И = 0, О = 5, (201 + 152 = 353) [**5 бодова**],
С = 2, Н = 1, И = 5, О = 0, (251 + 102 = 353) [**5 бодова**].

5. Када је у фабрици *А* запослено још 257 радника, онда је у њој 376 + 257 = 633 радника више него у фабрици *В* [**9 бодова**]. Пошто је у фабрици *В* запослено 489 радника, онда у фабрици *А* има више радника [**2 бода**] и то за 633 – 489 = 144 [**9 бодова**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

16.03.2024.

IV разред

1. Тањин тата је претходних 9 година сваког месеца имао исту плату, која је била 87831 динар. Сваког месеца је штедео тачно деветину плате. Колико новца је Тањин тата уштедео на овај начин за тих девет година?

2. Од 5 kg пшенице добија се 4 kg брашна, а од 2 kg брашна добија се 3 kg хлеба. Колико се килограма хлеба добије од 300 kg пшенице?

3. Обим правоугаоника је 8 dm 4 cm. Израчунај површину тог правоугаоника ако је једна његова страница два пута дужа од друге.

4. Милева, Цвета и Марта су се удружиле да заједно купе паприку за ајвар и сакупиле су 3490 динара. Да је Милева дала 270 динара више, а Цвета 140 динара више, свака би дала исту суму новца. Колико новца је дала свака од њих?

5. Збирка задатака из математике има непаран број страна. За нумерацију парних страна те збирке употребљене су 364 цифре. Колико је цифара употребљено да се нумерише цела збирка?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

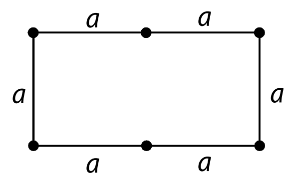
IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Месечно Тањин тата је штедео 87831 : 9 = 9759 динара [**6 бодова**]. За годину дана уштедео је 12 · 9759 = 117108 динара [**7 бодова**], а за девет година 9 · 117108 = 1053972 динара [**7 бодова**].

2. Ако се од 2 kg брашна добије 3 kg хлеба, онда се од 4 kg брашна добије 6 kg хлеба [**6 бодова**]. Дакле, од 5 kg пшенице се добије 4 kg брашна, односно 6 kg хлеба. Како је 300 kg пшенице 300 : 5 = 60 пута више од 5 kg пшенице [**8 бодова**], добиће се 60 пута више и хлеба, па је то 60 · 6 kg = 360 kg хлеба [**6 бодова**].

3. Означимо краћу страницу правоугаоника са a. Онда је дужа страница дужине $2 \cdot a$. У том случају је обим $O = 6 \cdot a$ [**5 бодова**]. Како је O = 8 dm 4 cm = 84 cm, то је a = 14 cm [**7 бодова**]. Дужа страница има дужину $2 \cdot a$ = 28 cm [**3 бода**], а површина је једнака $a \cdot b$ = 392 cm^2 [**5 бодова**].



4. Да је Милева дала 270 динара више, а Цвета 140 динара више, онда би укупно имале 3490 + 270 + 140 = 3900 динара [**6 бодова**], па би свака дала по 3900 : 3 = 1300 динара [**6 бодова**]. Дакле, Марта је дала 1300 динара, Милева 1300 − 270 = 1030 динара [**4 бода**], а Цвета 1300 − 140 = 1160 динара [**4 бода**].

5. (МЛ 57/3) ***I начин***. Одредимо колико има парних страна у књизи. За нумерацију 4 једноцифрене парне стране употребљене су 4 цифре [**2 бода**]. За нумерацију 45 двоцифрених парних страна употребљено је 90 цифара [**2 бода**]. Преостало је 364 – (4 + 90) = 270 цифара за нумерацију троцифрених парних страница [**3 бода**], тако да троцифрених парних страница има 270 : 3 = 90 [**3 бода**]. Укупан број парних страница је 4 + 45 + 90 = 139 [**2 бода**]. Парне и непарне стране се наизменично смењују, а како је последња непарна, то непарних страна има 140 [**3 бода**]. Дакле, збирка укупно има 279 страна. Од тога је 9 нумерисано једноцифреним, 90 двоцифреним и 180 троцифреним бројевима [**3 бода**], па је за нумерацију збирке употребљено 9 · 1 + 90 · 2 + 180 · 3 = 729 цифара [**2 бода**].

II начин. Првих 7 бодова као у I начину, тј. ако ученик покаже да су стране збирке нумерисане једноцифреним, двоцифреним и троцифреним бројевима. Први троцифрени број је паран. Како збирка има непаран број страна, то она има подједнак број страна нумерисаних парним и непарним троцифреним бројевима [**5 бодова**]. Збирка има и једнак број страна нумерисаних парним и непарним двоцифреним бројевима [**2 бода**]. Како од 1 до 9 има 4 парна и 5 непарних бројева, то је за нумерацију непарних страна употребљена једна цифра више [**2 бода**], па је за нумерацију целе збирке употребљено $364 + 365 = 729$ цифара [**4 бода**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

16.03.2024. – V разред

1. Израчунај разлику: $\dfrac{232323}{242424}-\dfrac{23}{24}$.

2. Углови α и β су комплементни, а углови α и 9β су суплементни. Одреди мере углова α и β.

3. Дат је правоугаоник $ABCD$ чији је обим 40 cm. На страници AB дата је тачка M таква да је дуж AM за 5 cm краћа од дужи BC. Ако је дуж MB три пута дужа од дужи AM, израчунај површину датог правоугаоника.

4. На екрану рачунара је исписана реченица

ТАСА СА СИНОМ И ЋЕРКОМ ИДЕ У БИОСКОП.

Сваки пут када притиснемо „+“ на тастатури, рачунар премести прво слово сваке речи на последње место те речи. На пример, када први пут притиснемо „+“ добијамо

АСАТ АС ИНОМС И ЕРКОМЋ ДЕИ У ИОСКОПБ.

Када други пут притиснемо „+“ добијамо

САТА СА НОМСИ И РКОМЋЕ ЕИД У ОСКОПБИ.

итд. Колико најмање пута треба притиснути „+“ да бисмо поново добили полазну реченицу?

5. Маја је кренула од куће бројећи кораке. Најпре је корачала 10 корака напред па 3 корака назад, 10 корака напред па 2 корака назад, 10 корака напред па 1 корак назад. Тај поступак Маја понавља при корачању. Колико корака Маја мора да направи да би се од куће удаљила 2038 корака?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

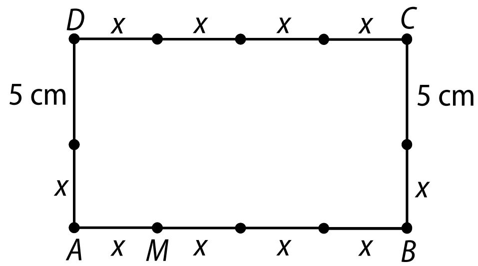
V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Како је 232323 : 23 = 10101 [**5 бода**] и 242424 : 24 = 10101 [**5 бода**], то је $\dfrac{232323}{242424}-\dfrac{23}{24}=\dfrac{23\cdot 10101}{24\cdot 10101}-\dfrac{23}{24}=\dfrac{23}{24}-\dfrac{23}{24}=0$ [**10 бодова**].

2. (МЛ 56/3) Из услова задатка следи да је $\alpha+\beta=90°$ и $\alpha+9\beta=180°$ [**2 бода**]. Како је угао 9β за 8β већи од угла β, то из дате две једначине имамо да је $8\beta=90°$ [**6 бодова**] одакле је $\beta=11°\,15'$ [**6 бодова**], па је $\alpha=78°\,45'$ [**6 бодова**].

3. Из услова задатка је $BC=AM+5$ cm и $AB=AM+MB=AM+3AM=4AM$ [**4 бода**]. Ако означимо $AM=x$, тада је обим правоугаоника (види слику) једнак $10x+10$ cm $=40$ cm [**6 бодова**]. Решавањем ове једначине добијамо да је $x=3$ cm [**3 бода**], па је $AB=12$ cm [**2 бода**] и $BC=8$ cm [**2 бода**]. Тражена површина је $AB\cdot BC=96\text{ cm}^2$ [**3 бода**].



4. За реч ТАСА потребно је 4 пута притиснути „+“ да би се поново добила иста реч (АСАТ, САТА, АТАС, ТАСА). Аналогно, за сваку другу реч потребно је притиснути „+“ онолико пута колико реч има слова. Дужине речи у датој реченици су 4, 2, 5, 1, 6, 3, 1, 7 [**5 бодова**]. Први следећи пут ћемо полазну реченицу добити када „+“ притиснемо онолико пута колика је вредност најмањег заједничког садржаоца свих ових бројева [**5 бодова**]. Како је НЗС (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) = 420, то је потребно 420 пута притиснути „+“ да бисмо први пут поново добили полазну реченицу [**10 бодова**].

5. При једном понављању целог поступка, Маја се од куће удаљи

$$(10 - 3) + (10 - 2) + (10 - 1) = 24 \text{ корака } [\textbf{2 бода}]$$

и у том корачању укупно направи

$$10 + 3 + 10 + 2 + 10 + 1 = 36 \text{ корака } [\textbf{2 бода}].$$

Како се 24 у 2038 садржи 84 пута [**2 бода**], цео поступак треба да понови 84 пута. Тада ће од куће бити удаљена $84 \cdot 24 = 2016$ корака [**4 бода**] и направиће укупно $84 \cdot 36 = 3024$ корака [**4 бода**]. Потребно је да се удаљи још $2038 - 2016 = 22$ корака [**1 бод**]. Како је $22 = (10 - 3) + (10 - 2) + 7$ [**2 бода**], закључујемо да је Маја укупно направила $3024 + 32 = 3056$ корака [**3 бода**].

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

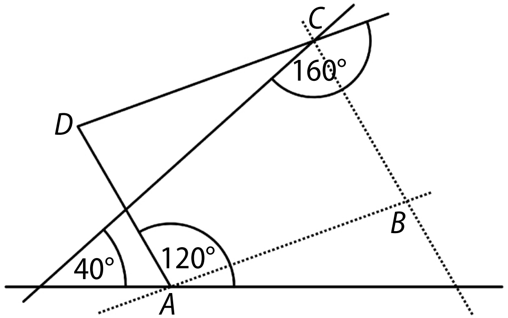
Окружно такмичење из математике ученика основних школа

16.03.2024. – VI разред

1. Израчунај вредност израза

$$\left(-2\frac{1}{4}\right):(-3)-\left(\left(\left(-\frac{3}{4}:\frac{9}{10}-1\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{9}+1\frac{5}{6}\right)-\left(-3-\frac{1}{8}\right)\right)\right)\cdot 4.$$

2. Одреди углове паралелограма *ABCD*.



3. Марко извлачи из шешира куглице на којима су написани бројеви 0, 5, 8 и 10. Извукао је једнак број куглица са бројевима 8 и 10. Извукао је неколико куглица на којима је број 5. Број куглица на којима је број 0 једнак је четвртини укупног броја извучених куглица. Колико куглица је Марко извукао из шешира ако је збир свих бројева на куглицама које је извукао 99?

4. Конструиши правоугли троугао чији један оштар угао има меру 22° 30′, ако му је збир катета 10,5 cm.

5. Одреди све целе бројеве *x* за које је $\dfrac{202}{3-|1+x|}$ цео број.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

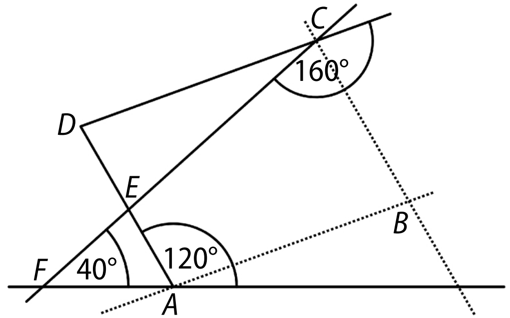
1. (МЛ 57/2)

$$\left(-2\frac{1}{4}\right):(-3)-\left(\left(\left(-\frac{3}{4}:\frac{9}{10}-1\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{9}+1\frac{5}{6}\right)-\left(-3-\frac{1}{8}\right)\right)\right)\cdot 4$$

$$=\frac{3}{4}\ [\mathbf{3\ бода}]-\left(\left(-\frac{5}{6}\ [\mathbf{3\ бода}]-3\ [\mathbf{3\ бода}]+\frac{11}{6}\right)+\frac{25}{8}\ [\mathbf{2\ бода}]\right)\cdot 4$$

$$=\frac{3}{4}-\left(-2\ [\mathbf{4\ бода}]+\frac{25}{8}\right)\cdot 4=\frac{3}{4}-\frac{9}{8}\ [\mathbf{3\ бода}]\cdot 4=\frac{3}{4}-\frac{9}{2}=-\frac{15}{4}\ [\mathbf{2\ бода}].$$

2. Уведимо тачке *E* и *F* као на слици. Важи да је $\measuredangle FAE = 60^\circ$ [**4 бода**], па је $\measuredangle AEF = \measuredangle DEC = 80^\circ$ [**4 бода**]. Како је $\measuredangle ECD = 20^\circ$ [**4 бода**], следи да је $\measuredangle EDC = 180^\circ - (80^\circ + 20^\circ) = 80^\circ$ [**4 бода**], па закључујемо да су углови паралелограма $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC = 80^\circ$ [**2 бода**] и $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD = 100^\circ$ [**2 бода**].

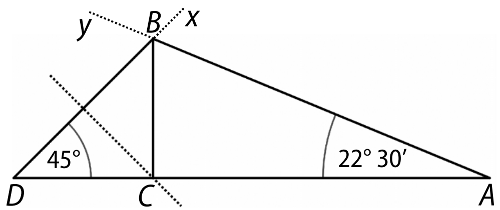


3. ***I начин***. Означимо са *x* број извучених куглица означених бројем 8, односно 10, а са *y* број извучених куглица означених бројем 5. Тада је $18x + 5y = 99$ [**4 бода**]. Како је $5y = 99 - 18x$, следи да $5 \mid (99 - 18x)$ [**3 бода**], и при томе је $0 \le x \le 5$, јер је $y \ge 0$ [**3 бода**]. Услов дељивости је испуњен само за $x = 3$ [**3 бода**], па је у том случају $5y = 45$, тј. $y = 9$ [**1 бод**]. Дакле, извучено је $2 \cdot 3 + 9 = 15$ куглица означених бројевима 8, 10 и 5, што према услову задатка представља $\frac{3}{4}$ укупног броја извучених куглица [**3 бода**], па следи да укупно извучено 20 куглица [**3 бода**].

II начин. На исти начин као у првом начину долазимо до једначине $18x + 5y = 99$ [**4 бода**]. Из једнакости $5y = 99 - 18x$ закључујемо да је лева страна дељива са 9 [**3 бода**] и да је непаран број [**2 бода**]. Стога је y непаран број који је дељив са 9 и мањи од 20 ($5y \leq 99$) [**3 бода**]. То је могуће само за $y = 9$ [**1 бод**], па је $x = 3$ [**1 бод**]. Преосталих 6 бодова као у I начину.

Напомена. Признавати и максимално бодовати ако ученик/ца констатује да је Марко морао да извуче куглице са бројевима 8 и 10 чији је укупни збир 0, 18, 36, 54, 72 или 90, па испита да ли је могућ сваки од датих случајева.

4. Анализа: Нека је дат троугао ABC и нека је, нпр. $\measuredangle CAB = 22° \, 30'$. Продужимо страницу AC троугла ABC преко темена C и одредимо на њој тачку D такву да је $CD = BC$ [**3 бода**]. Троугао DCB је једнакокрако-правоугли са правим углом у темену C, па је $\measuredangle BDC = 45°$ [**4 бода**], а тачка C припада симетрали основице BD овог троугла [**3 бода**]. Можемо конструисати троугао DAB, коме је позната страница $DA = DC + CA = BC + CA = 10{,}5$ cm и углови $\measuredangle BDC = 45°$ и $\measuredangle DAB = 22° \, 30'$ (страница и два налегла угла) [**3 бода**].
Конструкција: Конструишимо дуж $DA = 10{,}5$ cm. Конструишимо полуправу Dx која са дужи DA заклапа угао од 45° [**2 бода**], а затим и полуправу Ay која са дужи DA заклапа угао од 22° 30′ [**2 бода**]. Теме B се налази у пресеку полуправе Dx и полуправе Ay. Теме C одређујемо у пресеку странице DA и симетрале странице BD конструисаног троугла DAB [правилна конструкција симетрале **3 бода**].



Напомена 1. Бодовати одговарајућим бројем поена ако ученик није у анализи написао неки од датих делова, али се поступком конструкције уочава употреба тврђења.

Напомена 2. Признавати и максимално бодовати ако ученик теме C одреди као подножје нормале из темена B на страницу AD (уз правилну конструкцију нормале), јер је угао ACB прав.

5. Дати израз је дефинисан када је $|1 + x| \neq 3$, тј. за $1 + x \neq 3$ и $1 + x \neq -3$, односно за $x \neq 2$ и $x \neq -4$.
Дати израз је цео број када $3 - |1 + x|$ дели 202 , тј. када $3 - |1 + x| \in \{-202, -101, -2, -1, 1, 2, 101, 202\}$ [**4 бода**].
Разликујемо следеће случајеве:
а) $3 - |1 + x| = -202$. Одавде је $|1 + x| = 205$, па је $x = 204$ или $x = -206$.
б) $3 - |1 + x| = -101$. Одавде је $|1 + x| = 104$, па је $x = 103$ или $x = -105$.
в) $3 - |1 + x| = -2$. Одавде је $|1 + x| = 5$, па је $x = 4$ или $x = -6$.
г) $3 - |1 + x| = -1$. Одавде је $|1 + x| = 4$, па је $x = 3$ или $x = -5$.
д) $3 - |1 + x| = 1$. Одавде је $|1 + x| = 2$, па је $x = 1$ или $x = -3$.
ђ) $3 - |1 + x| = 2$. Одавде је $|1 + x| = 1$, па је $x = 0$ или $x = -2$.
[За свако тачно одређено x у деловима од а) до ђ) **по 1 бод**.]
е) $3 - |1 + x| = 101$. Одавде је $|1 + x| = -98$, па у овом случају нема решења [**2 бода**].
ж) $3 - |1 + x| = 202$. Одавде је $|1 + x| = -199$, па у овом случају нема решења [**2 бода**].
Дакле, решења су: −206, −105, −6, −5, −3, −2, 0, 1, 3, 4, 103, 204.

Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

16.03.2024.

VII разред

1. Дат је полином $P_1(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 6$. Збир полинома $P_1(x)$ и $P_2(x)$ једнак је $x^5 - x^2 - 2$. Одреди $P_1(x) + 2P_3(x)$ ако су $P_2(x)$ и $P_3(x)$ супротни полиноми.

2. Дати су изрази a, b и c:

$$a = 3^{2022} - 3^{2021} + 3^{2020}, \quad b = 14\sqrt{2}\cdot 3^{2020}, \quad c = 3^{2021} - 3^{2022} + 3^{2023}.$$

Докажи да a, b и c могу бити дужине страница правоуглог троугла.

3. Правоугли троугао ABC има катете дужина $AC = 12$ cm и $BC = 5$ cm. Полукруг са центром на страници AC додирује катету BC у тачки C, а хипотенузу AB у тачки D. Одреди дужину полупречника тог полукруга.

4. Колико има природних бројева n већих од 2, а мањих од 2024, таквих да је вредност израза

$$6^n + 7^n + 8^n - 789$$

дељива са 10?

5. Тачка M је средиште странице AB троугла ABC, а T је његово тежиште. Ако је троугао AMT једнакостраничан дужине странице 1 cm, одредити дужине страница троугла ABC.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Одузимањем добијамо

$$P_2(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 8 \text{ [\textbf{5 бодова}]}.$$

Како су $P_2(x)$ и $P_3(x)$ супротни полиноми, то је

$$P_3(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + 3x^2 - 5x + 8 \text{ [\textbf{5 бодова}]}.$$

Онда је $2P_3(x) = -2x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ [**5 бодова**], па је

$$P_1(x) + 2P_3(x) = -2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 15x + 22 \text{ [\textbf{5 бодова}]}.$$

2. (МЛ 58/2) Приметимо да је

$$a = 3^{2020}\cdot(3^2 - 3 + 1) = 7\cdot 3^{2020} \text{ [\textbf{4 бода}]}$$

и

$$c = 3^{2021}\cdot(1 - 3 + 3^2) = 7\cdot 3^{2021} \text{ [\textbf{4 бода}]}.$$

Како је $a < c$ и $b < c$, дати изрази могу бити дужине странице троугла, по обрнутој Питагориној теореми, ако је $a^2 + b^2 = c^2$. Како је

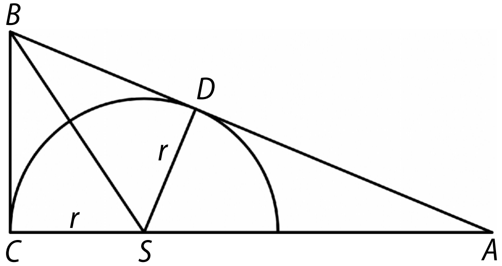
$$a^2 + b^2 = 49\cdot 3^{4040} + 392\cdot 3^{4040} = 441\cdot 3^{4040} \text{ [\textbf{4 бода}]}$$

и како је

$$c^2 = 49\cdot 3^{4042} = 49\cdot 9\cdot 3^{4040} = 441\cdot 3^{4040} \text{ [\textbf{4 бода}]},$$

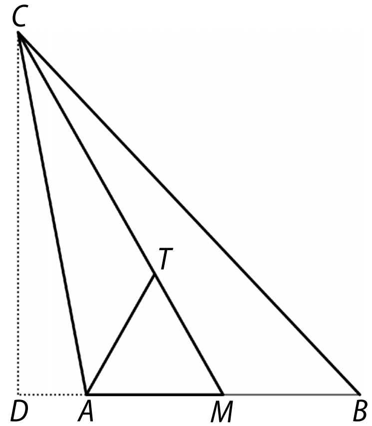
то је $a^2 + b^2 = c^2$, па a, b и c могу бити дужине страница правоуглог троугла [**4 бода**].

3. На основу Питагорине теореме је $AB = 13$ cm [**2 бода**]. Нека је S центар полукруга. Означимо $SC = SD = r$, где је r полупречник полукруга. Како полукруг додирује страницу AB у тачки D, то је $SD \perp AB$. Површина троугла ABC једнака је 30 cm^2 [**2 бода**]. Са друге стране, површина троугла ABC једнака је збиру површина троуглова CSB и SAB [**2 бода**]. Површина троугла CSB је $\frac{5\text{ cm}\cdot r}{2}$ [**4 бода**], док је површина троугла SAB једнака $\frac{13\text{ cm}\cdot r}{2}$ [**4 бода**]. Одатле је $9\text{ cm}\cdot r = 30\text{ cm}^2$, одакле добијамо $r = \frac{10}{3}$ cm [**6 бодова**].

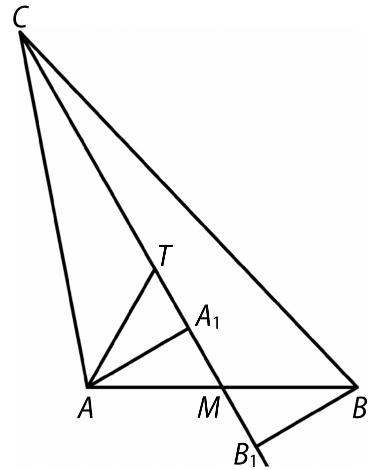


4. Приметимо да се 6^n завршава цифром 6 са свако n [**1 бод**]. Почевши од $n = 1$, број 7^n се завршава редом цифром 7, 9, 3, 1 које се затим периодично понављају са периодом 4 [**4 бода**]. Број 8^n се завршава редом цифром 8, 4, 2, 6 које се затим периодично понављају са периодом 4 [**4 бода**]. Дакле, $6^n + 7^n + 8^n$ завршава се редом цифром: ...6 + ...7 + ...8 = ...1; ...6 + ...9 + ...4 = ...9; ...6 + ...3 + ...2 = ...1; ...6 + ...1 + ...6 = ...3 [**4 бода**]. Да би тражени број био дељив са 10, $6^n + 7^n + 8^n$ мора се завршавати цифром 9. Како је $n > 2$, то је $n \in \{6, 10, 14, ..., 2022\}$ (сваки четврти почевши од 6), тј. $n = 4k + 2$, где је $1 \leq k \leq 505$ [**5 бодова**]. Самим тим, тражених бројева има 505 [**2 бода**].

5. ***I начин***. Како је M средиште дужи AB, то је $AB = 2AM = 2$ cm [**1 бод**]. Како тежиште дели тежишну дуж у односу 2 : 1, то је $CM = 3$ cm [**3 бода**]. Нека је D подножје нормале из темена C на праву AB. Тада је троугао DMC правоугли са угловима 90°, 60°, 30°. Одатле је $CD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm [**2 бода**] и $DM = \frac{3}{2}$ cm [**2 бода**], док је $AD = \frac{1}{2}$ cm [**1 бод**] и $BD = \frac{5}{2}$ cm [**1 бод**]. Применом Питагорине теореме на троуглове DAC и DBC добијамо $AC = \sqrt{7}$ cm [**5 бодова**] и $BC = \sqrt{13}$ cm [**5 бодова**].



II начин. Као у I начину, $AB = 2$ cm [**1 бод**] и $CM = 3$ cm [**3 бода**]. Нека су A_1 и B_1 подножја нормала из темена A и B на праву CM. Тада су троуглови AMA_1 и BMB_1 правоугли са угловима 90°, 60°, 30°, при чему су странице над правим углом једнаке 1 cm. Тада је $AA_1 = BB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm [**2 бода**], док је $MA_1 = MB_1 = \frac{1}{2}$ cm [**2 бода**]. Следи да је $CA_1 = \frac{5}{2}$ cm [**1 бод**] и $CB_1 = \frac{7}{2}$ cm [**1 бод**]. Применом Питагорине теореме на троуглове AA_1C и BB_1C добијамо да је $AC = \sqrt{7}$ cm [**5 бодова**] и $BC = \sqrt{13}$ cm [**5 бодова**].



Министарство просвете Републике Србије
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа

16.03.2024.

VIII разред

1. У простору је дато n тачака од којих никоје 3 нису колинеарне. Оне одређују тачно 2024 различитих равни. Одреди n.

2. Одреди линеарну функцију $y = kx + n$ чији график садржи тачку $A(0, 4)$ и са позитивним деловима координатних оса образује троугао површине 6.

3. Дат је збир
$$98! + 99! + 100!$$
Са колико нула се завршава овај збир?
Напомена. $n!$ представља производ свих природних бројева од 1 до n. На пример, $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

4. Одреди све природне бројеве a и b такве да је
$$a^2 - a = 4b^2 - 2b + 2024.$$

5. Дата је правилна шестострана пирамида $ABCDEFS$ чији је врх тачка S. Висина и основна ивица пирамиде су дужине 4 cm. Пирамида је пресечена равнима BDS и DFS. Израчунај површину и запремину новонастале четворостране пирамиде.

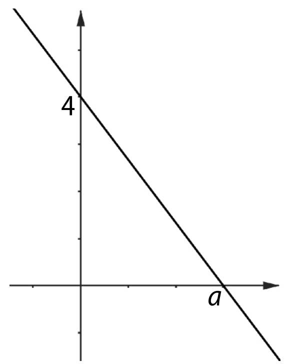
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложи.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Најмањи број тачака потребан за дати број равни је када никоје 4 нису компланарне и у том случају оне одређују $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ равни. Следи да је
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2024 \text{ [\textbf{10 бодова}]},$$
односно
$$n(n-1)(n-2) = 6 \cdot 2024 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23 \text{ [\textbf{6 бода}]}.$$
Груписањем одговарајућих чинилаца, добијамо $n(n-1)(n-2) = 24 \cdot 23 \cdot 22$, одакле је $n = 24$ [**4 бода**].
Напомена. Бодовати максималним бројем бодова ако је ученик одредио број тачака у датом случају и не дискутује да ли има други решења.

2. (МЛ 56/3) График функције сече y-осу у тачки A, па је $n = 4$, тј. функција има облик $y = kx + 4$ [**4 бода**]. Како график образује троугао са позитивним деловима оса, претпоставимо да сече x-осу у тачки $B(a, 0)$, $a > 0$ [**4 бода**]. Ако са O означимо координатни почетак, тада је површина троугла OAB једнака $\dfrac{4 \cdot a}{2} = 2 \cdot a$, а како је површина 6, то је $a = 3$ [**6 бодова**]. Како график функције садржи тачку B, заменом вредности у линеарној функцији добијамо $k = -\dfrac{4}{3}$ [**6 бодова**], па функција има облик $y = -\dfrac{4}{3}x + 4$.



3. Како је
$$98! + 99! + 100! = 98! \cdot (1 + 99 + 99 \cdot 100) = 98! \cdot 10^4 \text{ [\textbf{7 бодова}]},$$
треба одредити са колико нула се завршава 98!. Он се завршава са онолико нула колико има петица у његовој факторизацији на просте чиниоце [**3 бода**]. Како је $98 = 19 \cdot 5 + 3$, то постоји 19 бројева мањих

од 98 дељивих са 5 [**3 бода**]. Како међу њима има и дељивих са 25 ($= 5^2$) и како је $98 = 3 \cdot 25 + 23$, то постоје 3 броја мања од 98 дељива са 25 [**3 бода**]. Дакле, број 98! је дељив највише са $5^{19+3} = 5^{22}$ [**2 бода**], па се $98! + 99! + 100!$ завршава са $22 + 4 = 26$ нула [**2 бода**].

4. На дату једначину можемо применити следеће трансформације:

$$a^2 - a - 4b^2 + 2b = 2024, \qquad (a^2 - 4b^2) - (a - 2b) = 2024,$$

$$(a - 2b)(a + 2b - 1) = 2024 \text{ [}\textbf{7 бодова}\text{]}.$$

Приметимо да су бројеви $a - 2b$ и $a + 2b - 1$ различите парности јер је њихов збир $2a - 1$ [**4 бода**]. Како је $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ и $a - 2b < a + 2b - 1$ [**1 бод**], разликујемо следеће случајеве:

1) $a - 2b = 1$, $a + 2b - 1 = 2024$, па је $a = 1013$, $b = 506$;
2) $a - 2b = 8$, $a + 2b - 1 = 253$, па је $a = 131$, $b = 61{,}5$, што није решење;
3) $a - 2b = 11$, $a + 2b - 1 = 184$, па је $a = 98$, $b = 43{,}5$, што није решење;
4) $a - 2b = 23$, $a + 2b - 1 = 88$, па је $a = 56$, $b = 16{,}5$, што није решење.

[Свако тачно разматрање од 1) до 4) **по 2 бода**]

Дакле, једино решење је $(a, b) = (1013, 506)$.

Напомена. Признавати и прилагодити бодовање ако ученици разматрају без неког од почетних услова (парност, однос чинилаца, ...). Да би се бодовало максималним бројем поена потребно је испитати све случајеве који могу настати.

Напомена. Почетне трансформације (првих 7 бодова у решењу) можемо урадити и на следећи начин:

$$a^2 - a = 4b^2 - 2b + 2024 \quad /\cdot 4$$

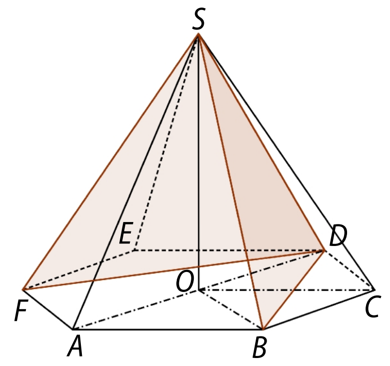
$$4a^2 - 4a = 16b^2 - 8b + 8096 \quad /+1$$

$$(2a - 1)^2 = (4b - 1)^2 + 8096 \text{ [}\textbf{3 бода}\text{]}$$

$$(2a - 4b)(2a + 4b - 2) = 8096 \text{ [}\textbf{3 бода}\text{]}$$

$$(a - 2b)(a + 2b - 1) = 2024 \text{ [}\textbf{1 бод}\text{]}.$$

5. Нова четворострана пирамида у основи има делтоид $ABDF$ чије су странице $AB = AF = 4$ cm и $BD = DF = 4\sqrt{3}$ cm [**2 бода**]. Дијагонале делтоида су $AD = 8$ cm и $BF = 4\sqrt{3}$ cm, па је површина базе $B = 16\sqrt{3}$ cm^2 [**3 бода**], а запремина $V = \dfrac{64\sqrt{3}}{3}$ cm^3 [**3 бода**].



Бочна ивица SB једнака је $4\sqrt{2}$ cm, као хипотенуза једнакокрако-правоуглог троугла OBS [**2 бода**]. Све странице једнакокраких троуглова ABS и BDS су познате па су њихове висине, редом, $2\sqrt{7}$ cm [**2 бода**] и $2\sqrt{5}$ cm [**2 бода**]. Омотач нове пирамиде састоји се од троуглова ABS и FAS (чије су површине једнаке) и од троуглова BDS и FDS (чије су површине једнаке), па је површина омотача $2 \cdot \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{7}}{2} + 2 \cdot \dfrac{4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 8\sqrt{7}$ [**2 бода**] $+ 8\sqrt{15}$ [**2 бода**] $= 8(\sqrt{7} + \sqrt{15})$ cm^2.

Дакле, површина пирамиде је $P = 8(2\sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{15})$ cm^2 [**2 бода**].