Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа 25.02.2017.

VI разред

1. Одреди све оштроугле троуглове чије су мере углова (изражене у степенима) прости бројеви.

2. У троуглу ABC унутрашњи угао код темена A једнак је $48°$, а симетрале унутрашњег и спољашњег угла код A секу праву BC у тачкама M и K, тим редом. Ако је троугао AMK једнакокрак, израчунај углове троугла ABC.

3. Одреди све целобројне вредности броја a за које је вредност разломка $\dfrac{8}{3\cdot a+1}$ цео број.

4. У држави Литеранији пише се писмом чија азбука садржи 19 слова, а име сваког становника састоји се од три речи. Закон у тој држави прописује да не смеју да постоје два становника са истим иницијалима (почетним словима сва три дела имена). Може ли у Литеранији бити 7000 становника?

5. Одреди најмањи природан број дељив са 5 чији је збир цифара једнак 2017.

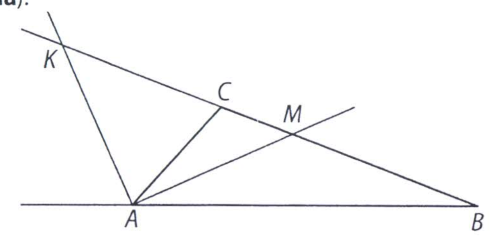
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Због услова да су мере сва три угла (у степенима) прости бројеви, а збир им је 180, један од њих мора бити једнак 2 (**5 поена**). Збир мера остала два угла је 178. Једино у случају да остала два угла имају меру 89 троугао ће бити оштроугли, јер у свим осталим случајевима (када су мере тих углова цели бројеви), бар један од њих има меру већу или једнаку 90 (**15 поена**; ако се само да одговор „89 и 89", без образложења зашто нема других решења, овај део бодовати са 7 поена).

2. (**МЛ LI-2**) Угао MAK је прав, па је $\measuredangle AMK = \measuredangle MKA = 45°$ (**10 поена**). Из троугла ACM је $\measuredangle ACM = 180° - 45° - 24° = 111°$ (**5 поена**), а из троугла ABC је $\measuredangle ABC = 180° - 48° - 111° = 21°$ (**5 поена**).



3. (**МЛ LI-3**) *Прво решење*. Мора да буде бројилац дељив имениоцем, тј. $3\cdot a+1 \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8\}$ (**8 поена**). Даље, добијамо да мора бити $3\cdot a \in \{0, -2, 1, -3, 3, -5, 7, -9\}$, што је могуће само за $a \in \{0, -1, 1, -3\}$ (свако решење **по 3 поена**).
Друго решење. За $a \geq 3$ је $3\cdot a + 1 \geq 10 > 8$, па вредност датог разломка не може бити цео број (**4 поена**). За $a \leq -4$ је $3\cdot a + 1 \leq -11 < -8$, па вредност разломка такође није цео број (**4 поена**). Преостају могућности $a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$. Њиховом провером добијају се решења $a \in \{-3, -1, 0, 1\}$ (свако решење **по 3 поена**).

4. Максималан број трословних иницијала у том писму је $19\cdot 19\cdot 19$. Како је $19^3 = 6849 < 7000$, то би у случају да у Литеранији има 7000 (или више) становника, бар два од њих морала имати једнаке иницијале, супротно закону. Дакле, у Литеранији не може бити 7000 становника (**20 поена**).

5. Последња цифра траженог броја је 0 или 5 (**2 поена**). Међу бројевима чија је последња цифра 0, најмањи са збиром 2017 је број $1\underbrace{99\ldots9}_{224}0$ (**7 поена**), Међу бројевима који се завршавају цифром 5, најмањи са збиром цифара 2017 је број $\underbrace{599\ldots9}_{223}95$ (**7 поена**). Овај последњи је мањи (има мање цифара) и он је тражени број (**4 поена**).