Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
27.02.2016.

VI разред

1. Дужине страница троугла ABC, у центиметрима, су цели бројеви, при чему је $b = 3a$. Ако је $c = 36\text{cm}$, коју најмању, а коју највећу вредност може имати обим тог троугла?

2. Да ли се квадратна табла 3×3 може попунити бројевима $-3, 0, 3$ тако да збир бројева у свакој колони, врсти и дијагонали буде различит?

3. Нека је $ABCD$ квадрат, а CDE једнакостранични троугао у спољашњости тога квадрата. Нека је F пресек дужи AE и CD. Одреди величину угла EFC.

4. Колико има природних бројева који су делиоци броја:
   а) 2015; б) 2016?

5. Нека су a, b, c, d, e, f, g бројеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 у неком редоследу. Докажи да је $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)(f-6)(g-7)$ паран број.

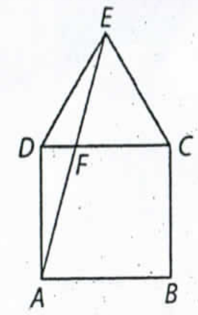
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 50/1**) Из неједнакости која важи за однос страница у троуглу следи $b - a < c < b + a$, тј. $2a < 36\text{cm} < 4a$ (**5 поена**), одакле је $9\text{cm} < a < 18\text{cm}$, дакле $10\text{cm} \leq a \leq 17\text{cm}$ (**10 поена**). Како је обим троугла једнак $O = a + b + 36 = 4a + 36\text{cm}$, најмања могућа вредност обима је 76cm, а највећа 104cm (**5 поена**).

2. Не може. Збир три броја од којих сваки припада скупу $\{-3, 0, 3\}$ може бити $-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9$, па постоји 7 могућих збирова. Како врста, колона и дијагонала има 8, по Дирихлеовом принципу у бар две од њих би збир био исти (**20 поена**).



3. Тругао AED је једнакокрак па је $\measuredangle ADE = 150°$ и $\measuredangle DEA = 15°$ (**5 поена**). Како је $\measuredangle DEC = 60°$, то је $\measuredangle FEC = 45°$ (**5 поена**). Из троугла EFC добијамо $\measuredangle EFC = 180° - \measuredangle FEC - \measuredangle ECF = 75°$ (**10 поена**).

4. (**МЛ 50/1**) а) $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Бројеви 5, 13, 31 се могу као фактори делиоца појавити 0 или 1 пут. Број делилаца броја 2015 је $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (**7 поена**).
б) Растављањем броја 2016 на просте чиниоце добијамо да је $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ (**3 поена**). Број 2 се као фактор делиоца појављује 0, 1, 2, 3, 4 или 5 пута, број 3 се појављује 0, 1 или 2, а број 7 се појављује 0 или 1 пут. Закључујемо да број 2016 има $(5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ делилаца (**10 поена**).

5. Међу датим бројевима три су парна и четири непарна (**5 поена**). Међу бројевима a, c, e, g барем један је непаран, па је барем једна од разлика $a - 1, c - 3, e - 5, g - 7$ паран број, одакле и цео производ мора бити паран број (**15 поена**).