VII РАЗРЕД

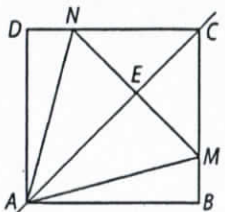
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 49/5**) Има девет троцифрених бројева у којима се два пута појављује цифра 0 (при чему 0 не може бити прва цифра) (**5 поена**). Посматрајмо сада цифре различите од нуле. Нека се таква цифра појављује тачно два пута. Ако се она не појављује на првом месту, онда цифра на првом месту може бити нека од осам цифара, различитих од те цифре и од нуле (**5 поена**). У остала два случаја (кад се иста цифра појављује као прва и друга или као прва и трећа), онда трећа цифра у запису може бити било која од преосталих 9 цифара (**5 поена**). Дакле, број тражених бројева је $9+9\cdot 8+2\cdot 9\cdot 9=9+72+162=243$ (**5 поена**).

2. а) Не може. Производ две извучене куглице може бити најмање 2^7 ($=2^3\cdot 2^4$), а како је извучена куглица 2^{11} на преостале две куглице производ не може да буде 2^6 (**8 поена**).
б) На 5 различитих начина: $2^3\cdot 2^4\cdot 2^{10}, 2^3\cdot 2^5\cdot 2^9, 2^3\cdot 2^6\cdot 2^8, 2^4\cdot 2^5\cdot 2^8, 2^4\cdot 2^6\cdot 2^7$.
(1 решење: 2 поена, 2 решења: 4 поена, 3 решења: 6 поена, 4 решења: 8 поена, свих 5 тачних решења: **12 поена**)

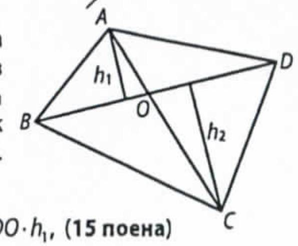
3. Како су тражени бројеви једнаки збиру квадрата два проста броја и непарни су, закључујемо да један од та два броја мора бити паран, тј. 2 (**5 поена**). Како се збир завршава цифром 3, а један сабирак је $2^2=4$, квадрат другог броја мора да се завршава цифром 9, тј. број се мора завршавати цифром 3 или 7 (**5 поена**). Закључујемо да други број може бити 3, 7, 13, 17 и 23 (**5 поена**), па постоји 5 тражених бројева ($2^2+3^2=13, 2^2+7^2=53, 2^2+13^2=173, 2^2+17^2=293, 2^2+23^2=533$) (**5 поена**).

4. а) Означимо са a дужину странице квадрата, а са x дужину странице троугла. $\Delta ABM \cong \Delta AND$ (ССУ: $\measuredangle ABM=\measuredangle ADN=90°$, $AB=AD$, $AM=AN$). Из подударности је $\measuredangle BAM=\measuredangle DAN=15°$, па је $\measuredangle MAC=\measuredangle NAC=30°$, значи $AC\perp MN$, а одатле је AC оса симетрије троугла AMN (**5 поена**).



б) Нека је E пресек дијагонале AC и странице MN. Имамо да је $AE=\frac{x\sqrt{3}}{2}$, док из једнакокрако-правоуглог троугла CMN је $CE=\frac{x}{2}$. Како је $a\sqrt{2}=AC=AE+CE=\frac{x\sqrt{3}}{2}+\frac{x}{2}$ (**10 поена**) и $a=\sqrt{3}+1$, страница троугла је $x=2\sqrt{2}$ (**5 поена**).

5. (**МЛ 48/1**) Означимо површине наведених троугло-ва редом са S_1, S_2, S_3, S_4. Нека су h_1 и h_2 дужине нормала из тачака A и C редом на дијагоналу BD. Видимо да је h_1 заједничка висина троуглова OAB и ODA из темена A, док је h_2 заједничка висина троуглова OBC и OCD из темена C. Тада је



$$S_1=\frac{1}{2}\cdot BO\cdot h_1,\quad S_2=\frac{1}{2}\cdot BO\cdot h_2,\quad S_3=\frac{1}{2}\cdot DO\cdot h_2,\quad S_4=\frac{1}{2}\cdot DO\cdot h_1,$$ (**15 поена**)

одакле се види да је $S_1\cdot S_3=S_2\cdot S_4=\frac{1}{4}\cdot BO\cdot DO\cdot h_1\cdot h_2$ (**5 поена**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа 27.02.2016 – VII разред

1. Колико има троцифрених бројева у чијем се запису појављују тачно две једнаке цифре?

2. У бубњу је 11 куглица и на свакој од њих је записан по један број из скупа $\{2^3, 2^4, ..., 2^{13}\}$. На случајан начин се истовремено извлаче 3 куглице из бубња.
а) Да ли се може добити да производ бројева са извучених куглица буде 2^{17} ако је на једној од извучених куглица записан број 2^{11}?
б) На колико различитих начина се може добити да производ бројева са извучених куглица буде 2^{17}?

3. Колико има бројева мањих од 1000 који се завршавају цифром 3 и једнаки су збиру квадрата два проста броја?

4. Једнакостранични троугао AMN уписан је у квадрат $ABCD$ тако да теме M припада дужи BC, а теме N дужи CD.
а) Докажи да је права AC оса симетрије троугла AMN.
б) Израчунај дужину странице тог троугла ако је дужина странице квадрата једнака $\sqrt{3}+1$.

5. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O и деле четвороугао на троуглове OAB, OBC, OCD и ODA. Докажи да је производ површина троуглова OAB и OCD једнак производу површина троуглова OBC и ODA.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.