VIII РАЗРЕД

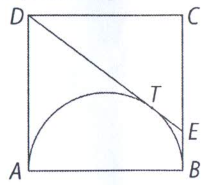
Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 50/2**) Једначина је еквивалентна са $|5-|20-6x||=7$, тј. $5-|20-6x|=7$ или $5-|20-6x|=-7$ [**5 поена**]. Прва једначина нема решења (разлика броја 5 и ненегативног броја не може бити једнака 7) [**5 поена**]. Друга се своди на $|20-6x|=12$, тј. $20-6x=12$ или $20-6x=-12$ [**5 поена**]. Решења су $\frac{4}{3}$ и $\frac{16}{3}$, а њихов збир $\frac{20}{3}$ [**5 поена**].

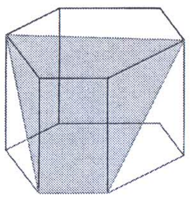
2. $$\begin{aligned}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})&=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})-2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\\&=1+2+3+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\\&=6\end{aligned}$$ [**20 поена**].

[Напомена: Може се користити и формула за квадрат тринома.]

3. Нека је T додирна тачка тангенте DE и полукруга и a дужина странице квадрата. Како су одговрајуће тангентне дужи међусобно једнаке имамо да важи $DA=DT=a$ и $EB=ET=x$ [**7 поена**]. Сада у троуглу DEC важи: $a^2+(a-x)^2=(a+x)^2$ [**7 поена**]. Одавде је $a^2+a^2-2ax+x^2=a^2+2ax+x^2$, односно $a^2=4ax$, одакле је $a=4x$. Дакле, тражена размера је $BE:EC=1:3$ [**6 поена**].



4. (**МЛ 50/2**) Пресек је једнакокраки трапез [**5 поена**] са основицама дужине 8cm (пречник описаног круга једне основе) и 4cm (страница друге основе) и краком дужине $4\sqrt{2}$cm (дијагонала бочне стране) [**5 поена**]. За висину h тог трапеза се добија $h^2=(4\sqrt{2}\text{cm})^2-(2\text{cm})^2=28\text{cm}^2$, па је $h=2\sqrt{7}$cm [**5 поена**], а површина трапеза је $12\sqrt{7}\text{cm}^2$ [**5 поена**].



5. Број 5005 се раставља на просте чиниоце као $5\cdot7\cdot11\cdot13$, па сваки од збирова у наведене читири заграде мора бити једнак једном од бројева 5, 7, 11 или 13 [**4 поена**]. Постоје два начина да се то оствари: $8+5=13$, $7+4=11$, $6+1=7$, $3+2=5$ [**4 поена**] и $7+6=13$, $8+3=11$, $5+2=7$, $4+1=5$ [**4 поена**]. У сваком од та два случаја, фактори могу променити места на $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ начина [**4 поена**], а у сваком збиру, сабирци могу заменити места на 2 начина, па је укупан број начина да се добије тачна једнакост $2\cdot24\cdot2^4$ [**4 поена**]= 768.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа

24.02.2018 – VIII разред

1. Одреди збир свих решења једначине
$$||1-2\cdot3|-|4\cdot5-6\cdot x||=7.$$

2. Израчунај вредност израза
$$\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right).$$

3. У унутрашњости квадрата $ABCD$ конструисан је полукруг над пречником AB. Нека је E тачка странице BC таква да је DE тангента на овај полукруг. У којој размери тачка E дели страницу BC?

4. Правилна шестострана једнакоивична призма ивице 4cm пресечена је са равни која садржи дуж дијагоналу једне основе и њој паралелну основну ивицу друге основе. Израчунај површину насталог пресека.

5. У једнакости
$$(A+B)\cdot(C+D)\cdot(E+F)\cdot(G+H)=5005$$
слова заменити бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (различита слова различитим бројевима) тако да се добије тачна једнакост. На колико начина се то може урадити?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.